

88

Міністерство освіти і науки України  
Національна гірничча академія України

ПРОГРАМА  
ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ  
З ДИСЦИПЛІНИ  
“СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ”  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ  
електротехнічних напрямків підготовки

Дніпропетровськ  
2001

**ПРОГРАМА  
ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ  
З ДИСЦИПЛІНИ  
"СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ"  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ  
електротехнічних напрямків підготовки**

Рекомендовано до видання науково-методичною радою академії  
(протокол № 11 від 21.11.2001 р.)

Дніпропетровськ  
НГА України  
2001

Програма та контрольні завдання з дисципліни "Спеціальні розділи вищої математики" для студентів заочної форми навчання електротехнічних напрямів /Уклад.: О.В. Бугрим, Є.С. Сінайський, В.Є. Ткаченко, Л.І. Заславська, - Дніпропетровськ:НГА України, 2001. - 19 с.

Укладачі: О.В. Бугрим,  
Є.С. Сінайський,  
В.Є. Ткаченко, кандидати фіз.-мат. наук, доценти,  
Л.І. Заславська, ст. виклад.

Відповідальна за випуск завідувачка кафедри вищої математики  
Л. В. Новикова – д-р техн. наук, проф.

## ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ З КУРСУ "СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ"

Основна форма навчання студента-заочника - самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з таких елементів: вивчення матеріалу за підручником, розв'язання задач, виконання контрольних робіт. На допомогу студентам академія організує лекції та практичні заняття. Крім того, студент може розраховувати на усну консультацію викладача. Вказівки студенту також даються в процесі рецензування контрольних робіт. Але студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній самостійній роботі допомога академії буде досить ефективна. Завершальний етап вивчення окремих частин курсу вищої математики - це здача заліків та іспитів у відповідності до навчального плану.

### Робота з підручником

Вивчаючи матеріал за підручником, треба переходити до наступного питання тільки після правильного розуміння попереднього, виконуючи на папері усі обчислення (в тому числі і ті, яких нема у підручнику).

Треба приділяти особливу увагу визначенню основних понять. Студент повинен розібрати приклади, які пояснюють такі визначення та наводити аналогічні приклади самостійно.

Необхідно враховувати, що кожна теорема складається з припущень та тверджень. Усі припущення повинні бути обов'язково використані при доведенні. Треба намагатися точного уявлення про те, у якому місці використано кожне припущення теореми. Корисно складати схеми доведення складних теорем.

При вивченні матеріалу за підручником корисно вести конспект, до якого записувати визначення, формулювання теорем, формули, рівняння і т. д. На полях конспекту відмічають питання, з якими треба звернутися до викладача.

### Розв'язок задач

Читання підручника повинно супроводжуватися розв'язанням задач, для чого рекомендується завести спеціальний зошит. Розв'язок задач треба виконувати з подробицями, обґрунтовувати кожен етап розв'язку, виходячи з теоретичних положень курсу, обчислення розташовувати в строгому порядку, відокремлювати допоміжні обчислення від головних. Креслення можна виконувати від руки, але акуратно та відповідно даним умовам. Якщо креслення треба

виконати ретельно, то користуються лінійкою, транспортиром, лекалом та вказують масштаб. Розв'язок кожної задачі доводиться до відповіді, яку вимагає умова, і по можливості в загальному вигляді. Потім в отриману формулу підставляють числові значення, якщо такі є. У допоміжних обчисленнях не вводять приблизних значень коренів, числа  $\pi$  і т. д.

### Самоперевірка

Після вивчення будь-якої теми за підручником та розв'язку достатньої кількості відповідних задач студенту рекомендується відтворити по пам'яті визначення, доведення формул, формулювання та доведення теорем. Питання для самоперевірки, наведені в цьому посібнику, дають змогу студенту впевнитися у щільності засвоєння вивченого матеріалу. У випадку необхідності треба ще раз уважно розібратися в матеріалі підручника та порозв'язувати задачі.

### Консультації

Якщо в процесі роботи з вивчення теоретичного матеріалу або при розв'язанні задач у студента виникають питання, відповіді на які він самостійно не може знайти відповідь (неясність термінів, формулювання теорем, розв'язок окремих задач), то він може звернутися до викладача за усною консультацією. У своїх запитаннях студент повинен точно вказати, в чому він зазнає утруднення. Якщо це теоретичне питання, то треба вказати підручник, де розглянуто це питання та що він не розуміє. Якщо склалося скрутне становище при розв'язанні задачі, то треба вказати характер цього утруднення, привести припущення відносно плану розв'язку.

### Контрольні роботи

У процесі вивчення курсу математики студент повинен виконати сім контрольних робіт, головна мета яких - надати студенту допомогу в його роботі. Рецензії на ці роботи дозволяють студенту судити про степінь засвоєння відповідного розділу курсу.

З кожної контрольної роботи студент виконує ті завдання, які мають відношення до його варіанта. Номер варіанта збігається з останньою цифрою номера залікової книжки або студентського квитка. Наприклад, номер залікової книжки - 007239, отже треба виконувати задачі варіанта № 9. Якщо остання цифра "0", то виконується варіант № 10. До відповідного варіанта належать усі задачі, номери яких закінчуються на цифру, що збігається з номером варіанта. Наприклад,

до варіанта №7 відносяться задачі: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97, 107, 117, 127.

Не починайте виконувати контрольне завдання, не розв'язавши достатньої кількості задач з матеріалу, що відповідає цьому завданню.

Виконувати контрольні завдання студент повинен самостійно, інакше він не придбає необхідних знань і не буде підготовленим до заліків або іспитів.

Кожну контрольну роботу треба прислати (принесити) в академію на кафедру вищої математики в окремому зошиті, на обкладинці якого обов'язково позначені номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, його шифр (номер залікової книжки), факультет та група, де навчається даний студент, домашня адреса.

Умови виконання контрольних завдань повністю збігаються з умовами розв'язку задач (див. вище).

Усі контрольні роботи за даний семестр повинні подаватися на кафедру не пізніше як за 10 днів до початку екзаменаційної сесії.

Після перевірки контрольних робіт треба зробити усі виправлення і доповнення, на які вказав рецензент.

Без прорецензованих контрольних робіт, де зроблені усі виправлення і доповнення, студент не допускається до заліків або іспитів.

### Заліки та іспити

На іспитах та заліках з'ясовуються засвоєння всіх теоретичних і практичних питань програми та вміння прикладати отримані знання до розв'язку практичних задач. Визначення, теореми, правила повинні формулюватися точно, розв'язання найпростіших задач треба проробляти без помилок та впевнено; будь-яка письмова робота виконується акуратно та чітко. Тільки за таких умов знання можуть бути визнані такими, що задовольняють вимогам програми.

## Програма курсу "Спеціальні розділи вищої математики"

### 1. ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ

1. Скалярне поле. Поверхні та лінії рівня скалярного поля. Похідна за напрямком. Градієнт.
2. Векторне поле. Векторні лінії. Потік вектору через поверхню. Фізичні приклади.
3. Дивергенція та формула Остроградського. Вираз дивергенції в декартових координатах. Джерела векторного поля.

4. Лінійний інтеграл та циркуляція. Формули Гріна і Стокса. Ротор, його вираз в декартових координатах, його механічний зміст.
5. Оператор Гамільтона та правила дій з ним.
6. Потенційні поля та їхні ознаки. Потенціальність безвихрового поля в однієїзній області. Умова повного диференціалу, відшукування функції за її повним диференціалом.
7. Соленоїдальні поля та їхні ознаки. Гармонійні поля.

## 2. ФУНКЦІ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

1. Комплексні числа, їхнє зображення на площині, алгебраїчні дії, властивості модуля і аргументу. Спряжені комплексні числа. Формули Ейлера.
2. Елементарні функції комплексної змінної.
3. Похідна функції комплексної змінної. Умова Коші — Римана. Спряжені гармонійні функції. Геометричний зміст похідної.
4. Конформні відображення. Розширена комплексна площина. Лінійні і дробово-лінійні відображення. Приклади інших відображень. Уявлення про багатозначні функції і точки галуження. Прикладання конформних відображень до теорії плоских полів.
5. Інтеграл від аналітичної функції, його властивості, основна теорема Коші.
6. Ряд Тейлора, коло збіжності. Ряд Лорана.
7. Ізольовані особливі точки аналітичної функції. Теорема Коші про лишки. Застосування до обчислення інтегралів. Принцип аргументу та його прикладання.

## 3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

1. Перетворення Лапласа і його основні властивості.
2. Зображення найпростіших оригіналів. Таблиці зображень.
3. Обернене перетворення Лапласа. Розкладання прообразу в суму.
4. Операційний метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами та систем рівнянь. Інші прикладання операційного методу.

## Список літератури

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2-х т. – М.: Наука, 1973. Т.2.
2. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф. Специальный курс высшей математики для вузов. – М.: Высш. шк., 1976.
3. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для вузов. – М.: Высш. шк., 1970.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981.
5. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики: В 2-х т. – М.: Высш. шк., 1978. Т.2.
6. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1973.
7. Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорова В.М. Математический анализ (специальные разделы): В 2-х ч. – М.: Высш. шк., 1980.
8. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.
9. Данко П.Е., Попов Л.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч. – М.: Высш. шк., 1980. Ч.2.
10. Запорожец Г.Н. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966.

### Методичні вказівки до вивчення курсу “Спеціальні розділи вищої математики”

Курс розбито на теми та пункти, в яких подаються докладні посилання на літературу, рекомендовану для вивчення теоретичного матеріалу та самостійного розв'язку задач. Номери у квадратних дужках [ ] позначають посібник з наведеного вище списку літературі: наприклад [1] позначає підручник Пискунова Н.С., і т. д.

У кожній темі наведені питання для самоперевірки. Вказано також, які задачі студент повинен розв'язувати після вивчення теми.

#### Тема 1. Векторний аналіз

1. Скалярне поле. Література. [2], гл. 1, §1; [6], гл.2, §4; [7], гл.1, §1,2; [10], гл.8, §1.
2. Векторне поле. Література. [1], ч.2, гл. 15, §5,6; [2], гл.1, §2; [5], т.2, гл. 10, §4; [6], гл. 2 §7; [7], гл. 1, §3,4.



3. Дивергенція. Література. [1], ч. 2, гл. 15, §8; [2], гл.1, §3; [4], гл. 5, §3.13; [5], т. 2, гл. 10, §4; [6], гл. 2, §8.9; [10], гл. 8, §2.
4. Лінійний інтеграл та циркуляція. Література. [1], ч. 2, гл. 15, §7; [2], гл. 1, §2.3; [4], гл.3, §3.15; [5], т. 2, гл. 10, §4; [6], гл. 2, §10.11; [10], гл. 8, §3.
5. Оператор Гамільтона. Література. [1], ч. 2, гл. 15, §9; [2], гл. 1, §1; [5], т. 2, гл. 10, §4; [6], гл. 2, §13; [7], гл. 1, §6.
6. Потенційні поля. Література. [2], гл. 1, §5; [5], т. 2, гл. 10, §4; [6], гл. 2, §6; [7], гл. 2, §5.
7. Соленоїдальні поля. Література. [2], гл. 1, §5; [6], гл. 2, §9; [7], гл. 2, §2.3;

### Питання для самоперевірки

1. Що називається скалярним полем, поверхнями та лініями рівня? Наведіть приклади фізичних скалярних полів.
2. Що називається похідною за напрямком та градієнтом скалярного поля? Які властивості має градієнт? Як цей вектор розташований відносно поверхні рівня? Який фізичний зміст мають похідна за напрямком та градієнт скалярного поля?
3. Дайте визначення оператора Гамільтона. Як за його допомогою записати градієнт скалярного поля?
4. Що називається векторним полем? Наведіть приклади. Дайте визначення векторних ліній і напишіть їхні диференціальні рівняння.
5. Яке поле називається потенційним? Що таке потенціал цього поля. Сформулюйте достатні умови потенційності поля?
6. Що називається лінійним інтегралом векторного поля? Що таке циркуляція векторного поля? Наведіть приклад на її обчислення.
7. Що називається потоком векторного поля? Напишіть формулу для його обчислення. Наведіть приклад на застосування цієї формули.
8. Як інтеграл по поверхні зводиться до подвійного інтегралу?
9. Що називається дивергенцією векторного поля? Наведіть приклад на її обчислення.
10. У чому полягає фізичний зміст дивергенції? Що таке джерела та стоки векторного поля? Визначте умови соленоїдальності векторного поля.
11. Як записати дивергенцію за допомогою оператора Гамільтона? Які властивості має дивергенція?

12. Виведіть формулу Остроградського та напишіть її у векторній формі. Як за допомогою цієї формули обчислюється потік вектора через замкнену поверхню?
13. Що називається ротором векторного поля? Наведіть приклад на його обчислення. Який фізичний зміст має ротор? Яке поле зветься безвихровим?
14. Як записати ротор за допомогою оператора Гамільтона? Які властивості має ротор?
15. Виведіть формулу Стокса та напишіть її у векторній формі. В чому полягає зміст цієї формули? Як за її допомогою обчислити циркуляцію векторного поля?
16. Як перевірити чи є векторне поле потенційним? Як знайти потенціал векторного поля?
17. Що називається оператором Лапласа? Який вигляд має рівняння Лапласа? Як називається функція, що задовольняє цьому рівнянню?

## Тема 2. Функції комплексної змінної

1. Комплексні числа. Література. [3], гл. 1, §1; [6], гл. 3, §1; [7], ч. 1, гл. 1, §1,2; [8], гл. 1, §1.
2. Елементарні функції комплексної змінної. Література. [3], гл. 1, §2,3; [4], гл. 6, §6.1; [6], гл. 3, §4,5; [8], гл. 1, §2; [9], гл. 7, §1.
3. Похідна функції комплексної змінної. Література. [3], гл. 1, §4; [4], гл. 6, §6.2, §6.3; [6], гл.3, §6; [7], ч. 1, гл. 1, §4; [8], гл. 1, §4; [9], гл. 7, §2.
4. Конформні відображення. Література. [3], гл. 1, §5; [4], гл. 6, §6.15; [6], гл. 3, §20; [7], ч. 1, гл. 2, §1,2,3; [8], гл. 1, §12; [9], гл. 7, §3.
5. Інтеграл від аналітичної функції. Література. [3], гл. 1, §6; [6], гл. 3, §7-11; [7], ч. 1, гл. 3, §1,2; [8], гл.1, §5,6; [9], гл. 7, §4.
6. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Література. [3], гл. 1, §7; [6], гл. 3, §2, 3,14,15; [7], ч. 1, гл. 5, §1-3; [8], гл. 1, §7; [9], гл. 7, §5.
7. Ізольовані особливі точки аналітичної функції. Теорема Коші. Література. [3], гл. 1, §7.8; [4], гл. 6, §6.11-6.13; [6], гл. 3, §16,17; [8], гл.1, §8-10; [9], гл. 7, §6.

## Питання для самоперевірки

1. Що називається комплексним числом, його дійсними та уявними частинами, алгебраїчною формою запису?
2. Що називають модулем та аргументом комплексного числа? Як записують комплексне число в тригонометричній та показниковій формах?
3. Як виконують алгебраїчні дії над комплексними числами? Що таке формули Муавра?
4. Що називають функцією комплексної змінної? Який її геометричний зміст?
5. Як визначають та обчислюють елементарні функції  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\sinh z$ ,  $\cosh z$ ,  $\operatorname{Ln} z$ ,  $a^z$ ? Що таке головна частина багатозначної функції?
6. Дайте визначення похідної і диференціалу функції комплексного змінного
7. Яка функція називається аналітичною? Виведіть необхідні та достатні умови для аналітичності функції.
8. Дайте визначення гармонійної функції. Які функції є спряженими гармонійними функціями? Наведіть приклад.
9. Який геометричний зміст модуля та аргументу похідної?
10. Що називається конформним відображенням? Наведіть приклади конформних відображень.
11. Які відображення здійснюють лінійна і дробово-лінійна функції? ...
12. Дайте визначення інтегралу від функції комплексного змінного та сформулюйте основні його властивості.
13. Сформулюйте основну теорему Коші і наведіть приклади для її додатку.
14. Що називається інтегралом Коші та інтегралом типу Коші?
15. Який вигляд має ряд Тейлора для функції комплексної змінної? За яких умов функцію можна розвинути в ряд Тейлора?
16. Ряди Тейлора для основних елементарних функцій в околі точки  $z=0$ ?
17. Дайте визначення ряду Лорана. Що є областю збіжності ряду Лорана?
18. Дайте класифікацію ізольованих особливих точок аналітичної функції. Що називають нулями та особливими точками функції?
19. Дайте визначення лишків функції відносно ізольованої особливої точки.
20. Сформулюйте теорему Коші про лишки. Як обчислюють контурні та невластні інтеграли за допомогою лишків?

### Тема 3. Операційне числення

1. Перетворення Лапласа. Література. [1], гл. 19, §1-5, 7,13, 19; [3], гл. 3, §1-3; [5], гл. 14, §1-4; [6], гл. 5, §1-3; [7], ч. 1, гл. 12, §1-3; [8], гл. 2, §14; [9], гл. 8, §1.
2. Зображення найпростіших оригіналів. Література. [1], гл. 19, §2,6,8,20; [3], гл. 3, §5; [5], гл. 14, §2,5; [6], гл. 5, §5; [7], ч. 1, гл. 12, §1; [9], гл. 8, §1-3.
3. Обернене перетворення Лапласа. Література. [1], гл. 19, §11; [3], гл. 3, §4; [7], ч. 1, гл. 12, §4; [9], гл. 8, §5.
4. Операційний метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь. Література. [1], гл.19, §10-12; [3], гл. 3, §3; [5], гл. 14, §6,7; [6], гл. 5, §6; [8], гл. 2, §15-18; [9], гл. 8, §4-6.

### Питання для самоперевірки

1. Які функції називають оригіналами? Наведіть приклади і контрприклад.
2. Що таке пряме та обернене перетворення Лапласа? Якими рівностями їх можна виразити? За яких умов вони правильні?
3. Які якості має зображення на комплексній площині? Як його відшукати для найпростіших оригіналів – функції Хевісайда,  $e^{at}$ ,  $\sin bt$ ?
4. У чому полягають властивості лінійності, подібності, зсуву, загалювання? Як їх довести?
5. Як відшукати зображення похідної, інтеграла, згортки?
6. Як записують і де застосовують формулу Дюамеля?
7. Як за допомогою лишків виконують обернене перетворення Лапласа?
8. У чому суть операційного методу розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь?

### Задачі для контрольних завдань

#### Тема 1. Векторний аналіз

1-10. Для заданого скалярного поля  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  та точок  $M$  і  $N$  знайти:

поверхню рівня, що проходить через точку  $M$ ;

похідну функції  $\varphi(x, y, z)$  у точці  $M$  у напрямку вектора  $\vec{l} = \overline{MN}$ ;

напрямок та швидкість найшвидшого зростання поля  $\varphi(x, y, z)$ .

1. $\varphi = x(yz + 2x)$	$M(1,0,2)$	$N(4,4,2)$ ;
2. $\varphi = x^2yz$	$M(2,-1,3)$	$N(4,1,2)$ ;
3. $\varphi = xy^2z$	$M(-1,1,2)$	$N(2,1,6)$ ;
4. $\varphi = xy^2z^2$	$M(3,1,-2)$	$N(2,-1,0)$ ;
5. $\varphi = x^2y^2z$	$M(-1,3,1)$	$N(1,2,3)$ ;
6. $\varphi = x^2yz^2$	$M(2,-1,-1)$	$N(6,3,1)$ ;
7. $\varphi = xy^2z^2$	$M(1,1,3)$	$N(3,1,0)$ ;
8. $\varphi = y^2z - x^3$	$M(1,2,2)$	$N(3,5,-1)$ ;
9. $\varphi = x^2y + y^2z$	$M(0,-1,2)$	$N(3,-1,-2)$ ;
10. $\varphi = x(y + z^3)$	$M(2,1,0)$	$N(-4,4,6)$ .

11-20. Знайти векторні лінії векторних полів. Зробити рисунок.

- |   |  |
|---|--|
| 11. $\vec{a} = 3x\vec{i} + y\vec{j}$ ;                    | 12. $\vec{a} = 2z\vec{j} + 4y\vec{k}$ ;  |
| 13. $\vec{a} = x\vec{i} + z\vec{j}$ ;                     | 14. $\vec{a} = z\vec{j} - y\vec{k}$ ;    |
| 15. $\vec{a} = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j}$ ; | 16. $\vec{a} = -4x\vec{i} + 2y\vec{j}$ ; |
| 17. $\vec{a} = x\vec{i} - z\vec{k}$ ;                     | 18. $\vec{a} = 2x\vec{i} - y\vec{j}$ ;   |
| 19. $\vec{a} = 2y\vec{i} + x\vec{j}$ ;                    | 20. $\vec{a} = z\vec{j} - y\vec{k}$ .    |

21-30. Для заданого векторного поля  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$  знайти:

1) потік вектора  $\vec{a}$  через замкнену поверхню  $\sigma$  у напрямку зовнішньої нормалі

- а) безпосередньо;
- б) за формулою Гауса-Остроградського.

2) циркуляцію вектора  $\vec{a}$  по контуру  $\lambda$ , що створений на перетині заданих поверхонь

- а) безпосередньо;
- б) за формулою Стокса.

Якщо контурів декілька, вибрати той, що не належить координатним площинам  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

21.  $\vec{a} = (x - y^2)\vec{i} + z\vec{k}$ ,  $\sigma: z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z = 4$ ;

Укладачі:

Ольга Володимирівна Бугрим

Євген Самійлович Сінайський

Володимир Євгенійович Ткаченко

Людмила Іванівна Заславська

**ПРОГРАМА ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ** з дисципліни "Спеціальні розділи вищої математики" для студентів заочної форми навчання електротехнічних напрямів підготовки

Редакційно-видавничий комплекс

Редактор В.А. Третяк

Підписано до друку 21.11.2001. Формат 30x42/4

Папір Rollux. Ризографія. Умовн. друк. арк. 1,1.

Обліково-видавн. арк. 1,1. Тираж 200 прим. Зам № 551.

НГА України

49027, м. Дніпропетровськ-27, просп. К. Маркса, 19.

22.  $\vec{a} = 2x\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j} - z\vec{k}$ ,  $\sigma: z^2 = x^2 + y^2, z = h (h > 0)$ ;  
 23.  $\vec{a} = (x + 3y^2)\vec{i} - z\vec{j}$ ,  $\sigma: z = 6 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$ ;  
 24.  $\vec{a} = yz\vec{i} + zy\vec{j} - z(x^2 + y^2)\vec{k}$ ,  $\sigma: y^2 = x^2 + z^2, y = 1, 0 \leq y \leq 1$ ;  
 25.  $\vec{a} = x\vec{i} + (x^2 - 3y)\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\sigma: z^2 = x^2 + y^2, z = x^2 + y^2$ ;  
 26.  $\vec{a} = 2x\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j} + 3z\vec{k}$ ,  $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 4, 3z = x^2 + y^2$ ;  
 27.  $\vec{a} = (x + 2y^2)\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k}$ ,  $\sigma: 1 - z = x^2 + y^2, z = 0$ ;  
 28.  $\vec{a} = (2x - y^2)\vec{i} - (z - 1)\vec{k}$ ,  $\sigma: x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 1$ ;  
 29.  $\vec{a} = z^2\vec{i} + (xz + 3y)\vec{j} + x^2y\vec{k}$ ,  $\sigma: 3x + y + 2z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$ ;  
 30.  $\vec{a} = 2yz\vec{i} + (x^2 + y)\vec{j} + xy\vec{k}$ ,  $\sigma: x + 2y + 2z = 4, x = 0, y = 0, z = 0$ .

31-40. Для заданих векторного поля  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$  та скалярного поля  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  обчислити вирази ( $\nabla$  - оператор Гамільтона):

31.  $\nabla \times \vec{a}$ ,  $\vec{a} = 3x\vec{i} + y^2\vec{j} - 2z\vec{k}$ ;  
 32.  $|\nabla \varphi|$ ,  $\varphi = 2x - y + 2z$ ;  
 33.  $\nabla \cdot (\nabla \varphi)$ ,  $\varphi = x^2 - y^2 - z^2$ ;  
 34.  $|\nabla \times \vec{a}|$ ,  $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} - x\vec{k}$ ;  
 35.  $\nabla \times (\nabla \varphi)$ ,  $\varphi = 3x - yz$ ;  
 36.  $|\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a})|$ ,  $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ ;  
 37.  $\nabla \cdot (\nabla \varphi)$ ,  $\varphi = x^2 - xy + yz$ ;  
 38.  $\nabla \times (\nabla \varphi)$ ,  $\varphi = 3x^2 + y - z^2$ ;  
 39.  $|\nabla \times (\nabla \times \vec{a})|$ ,  $\vec{a} = z\vec{i} + (y - x)\vec{j} + y\vec{k}$ ;  
 40.  $|\nabla \times (\nabla \cdot \vec{a})|$ ,  $\vec{a} = 2y^2\vec{i} - z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$ .

41-50. Перевірити, чи буде задане векторне поле  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$  потенційним та соленоїдним. У разі потенційності знайти його потенціал.

41.  $\vec{a} = (-2x - yz)\vec{i} + (-2y - xz)\vec{j} + (-2z - xy)\vec{k}$ ;  
 42.  $\vec{a} = (2x - yz)\vec{i} + (2y - xz)\vec{j} + (2z - xy)\vec{k}$ ;  
 43.  $\vec{a} = (2x + yz)\vec{i} + (2y + xz)\vec{j} + (2z + xy)\vec{k}$ ;  
 44.  $\vec{a} = (2x - 4yz)\vec{i} + (2y - 4xz)\vec{j} + (2z - 4xy)\vec{k}$ ;  
 45.  $\vec{a} = (2x - 3yz)\vec{i} + (2y - 3xz)\vec{j} + (2z - 3xy)\vec{k}$ ;

46.  $\vec{a} = (-3x + yz)\vec{i} + (-3y + xz)\vec{j} + (-3z + xy)\vec{k}$ ;  
 47.  $\vec{a} = (2x + 2yz)\vec{i} + (2y + 2xz)\vec{j} + (2z + 2xy)\vec{k}$ ;  
 48.  $\vec{a} = (4x + yz)\vec{i} + (4y + xz)\vec{j} + (4z + xy)\vec{k}$ ;  
 49.  $\vec{a} = (2x + 5yz)\vec{i} + (2y + 5xz)\vec{j} + (2z + 5xy)\vec{k}$ ;  
 50.  $\vec{a} = (2x + 3yz)\vec{i} + (2y + 3xz)\vec{j} + (2z + 3xy)\vec{k}$ .

### Тема 2. Функції комплексної змінної

51-60. Виконати дії. Результат представити в показниковій та тригонометричній формах.

$$51. \frac{(1+i\sqrt{2})^2 - (2+2\sqrt{2}i)}{i-3};$$

$$52. \frac{(1+2i)^3 - 1}{1-i} - \frac{1}{1+i};$$

$$53. \frac{(5-2i)(1+i)}{(1-2i)^3 + 10};$$

$$54. \frac{5i}{i-2} + (2+i)^2(3+2i);$$

$$55. \frac{(1+2i)^3 + (1+i)^2}{2+i\sqrt{3}};$$

$$56. \frac{(2+i)^2 - 3(1-2i)}{3+4i};$$

$$57. \left(\frac{1+2i}{1+i}\right)^2 - (1-i);$$

$$58. \frac{2+3i}{2+i} - (i-1)^3;$$

$$59. \frac{2+i}{(1-i)^3} + \frac{2i-5}{i-1};$$

$$60. \frac{(\sqrt{2}-2i)^2 - 4(1-\sqrt{2}i)}{1+5i}.$$

61-70. Функцію  $w = f(z)$ , де  $z = x + iy$  задати у вигляді  $w = u(x, y) + iv(x, y)$ . Перевірити, чи є задана функція аналітичною. Якщо так, тоді знайти її похідну у точці  $z_0$ .

$$61. w = (z^2)^3, \quad z_0 = -1 + i. \quad 62. w = e^{-z^2}, \quad z_0 = i.$$

$$63. w = i(1-z^2) - 2z, \quad z_0 = 1. \quad 64. w = e^{1-2z}, \quad z_0 = \frac{\pi i}{3}.$$

$$65. w = z^3 + 3z - i, \quad z_0 = -i. \quad 66. w = e^{1-2iz}, \quad z_0 = \frac{\pi}{6}.$$



$$67. w = 2z^3 - iz, \quad z_0 = 1 - i. \quad 68. w = e^{z^2}, \quad z_0 = \frac{i\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$69. w = z^3 + z^2 + i, \quad z_0 = \frac{2i}{3}. \quad 70. w = ze^z, \quad z_0 = -1 + i\pi.$$

71-80. Знайти всі розвинення у ряд Лорана функції  $f(z)$  за степенями  $z - z_0$ . Назвати лишки відносно точки  $z_0$ .

$$71. f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \quad z_0 = i; \quad 72. f(z) = \frac{z+4}{z^2 - 1}, \quad z_0 = -1;$$

$$73. f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}, \quad z_0 = 2; \quad 74. f(z) = \frac{z+1}{z^2 - 4}, \quad z_0 = -2;$$

$$75. f(z) = \frac{z+5}{z^2 + 9}, \quad z_0 = 3i; \quad 76. f(z) = \frac{2z+1}{z^2 + z}, \quad z_0 = 0;$$

$$77. f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}, \quad z_0 = 1; \quad 78. f(z) = \frac{(z-1)}{z^2 - 3z}, \quad z_0 = 3;$$

$$79. f(z) = \frac{z+1}{z^2 + 4}, \quad z_0 = -2i; \quad 80. f(z) = \frac{z-2}{z^2 + 3z + 2}, \quad z_0 = -2;$$

81-90. Обчислити інтеграли.

$$81. \int \frac{\cos z dz}{z^2(z+i)^2}, \quad l: \quad 1) |z| = \frac{1}{2}; \quad 2) |z| = 2;$$

$$82. \int \frac{\sin(z+i) dz}{z(z-i)^2}, \quad l: \quad 1) |z| = \frac{1}{2}; \quad 2) |z| = 2;$$

$$83. \int \frac{e^z dz}{z^3(z^2+1)^2}, \quad l: \quad 1) |z| = \frac{1}{2}; \quad 2) |z| = 2;$$

$$84. \int \frac{dz}{z^2(z^2-4)}, \quad l: \quad 1) |z+2| = 1; \quad 2) |z| = 3;$$

$$85. \int \frac{dz}{z^3(z-1)}, \quad l: \quad 1) |z| = \frac{1}{2}; \quad 2) |z-1| = 2;$$

$$86. \int \frac{dz}{z(z-i)^2}, \quad l: \quad 1) |z+i| = \frac{3}{2}; \quad 2) |z| = 2;$$

$$87. \int \frac{zdz}{(1+z^2)(z-1)}, \quad l: \quad 1) |z-1| = 1; \quad 2) |z| = 2;$$

$$88. \int \frac{\cos z dz}{z^2(z^2+4)}, \quad l: \quad 1) |z-2i| = 3; \quad 2) |z| = 3;$$

$$89. \int \frac{dz}{(z+1)^2(z-1)}, \quad l: \quad 1) |z-1| = 1; \quad 2) |z| = 2;$$

$$90. \int \frac{(1+z)dz}{z^2(z^2+1)}, \quad l: \quad 1) |z-i| = \frac{1}{2}; \quad 2) |z| = 2.$$

### Тема 3. Операційне числення

91-100. Операційним методом дістати розв'язок задачі Коші для даного диференціального рівняння за нульовими початковими умовами  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ . Шуканий оригінал  $x(t)$  знайти двома способами:

а) використовуючи табличні значення;

б) застосовуючи формулу оберненого перетворення Лапласа, пов'язану з обчисленням лишків.

$$91. x'' - 4x' = 40 \sin 2t;$$

$$92. x'' - 4x' + 5x = 5e^{4t};$$

$$93. x'' + 4x' + 3x = 6;$$

$$94. x'' + 2x' = 8t;$$

$$95. x'' - 6x' + 5x = 12e^{2t};$$

$$96. x'' + 3x' = 30 \sin t;$$

$$97. x'' - 16x = 48e^{-2t};$$

$$98. x'' + 2x' - 3x = 24e^{3t};$$

$$99. x'' - x' = 39 \cos 3t;$$

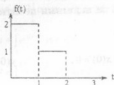
$$100. x'' + x = 10e^{-3t}.$$

101-110. Операційним методом, застосовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти розв'язок  $y = y(t)$  рівняння  $y'' + ay' + by = f(t)$ . За умовами  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ . Функція  $f(t)$  задана графічно. За межами зазначеного проміжку вона перетворюється в нуль.

101.

$$a = -1$$

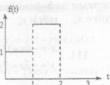
$$b = 0$$



102.

$$a = 2$$

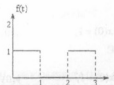
$$b = 1$$



103.

$$a = -4$$

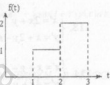
$$b = 0$$



104.

$$a = 1$$

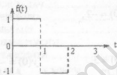
$$b = 0$$



105.

$$a = 6$$

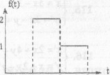
$$b = 9$$



106.

$$a = -3$$

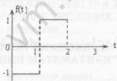
$$b = 0$$



107.

$$a = -3$$

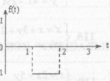
$$b = 2$$



108.

$$a = 3$$

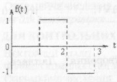
$$b = -4$$



109.

$$a = -4$$

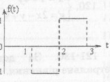
$$b = 3$$



110.

$$a = 1$$

$$b = -2$$



111-120. Знайти функції  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , які є розв'язком даної системи диференціальних рівнянь за відомими початковими умовами  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ .

$$111. \begin{cases} x' = -4x + 15y - 2 \\ y' = -2x + 7y - 2 \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1;$$

$$112. \begin{cases} x' = x - 4y + 6 \\ y' = 2x - 3y + 4 \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2;$$

$$113. \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y - te^{2t} \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0;$$

$$114. \begin{cases} x' = x + y - e^t \\ y' = 4x + y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3;$$

$$115. \begin{cases} x' = 5x - 3y \\ y' = 3x - y + e^{3t} \end{cases}, \quad x(0) = -2, \quad y(0) = -3;$$

$$116. \begin{cases} x' = 2x + 4y + 5e^t \\ y' = x + 2y - e^t \end{cases}, \quad x(0) = 5, \quad y(0) = -1;$$

$$117. \begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 4x - 2y \end{cases}, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0;$$

$$118. \begin{cases} x' = x + 3y + 2 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 2;$$

$$119. \begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = x - 2y + 2 \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1;$$

$$120. \begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x - y + 9 \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

121-130. За допомогою перетворення Лапласа розв'язати інтегральне рівняння.

121.  $y(t) = \sin t + 2 \int_0^t \cos(t - \tau)y(\tau)d\tau$ ;      122.  $y(t) = 12t^2 + \int_0^t \sin(t - \tau)y(\tau)d\tau$ ;  
 123.  $y(t) = t + \int_0^t e^{-\tau}y(\tau)d\tau$ ;      124.  $y(t) = e^t + \int_0^t (t - \tau)y(\tau)d\tau$ ;  
 125.  $y(t) = t + \int_0^t \frac{(t - \tau)^3}{6}y(\tau)d\tau$ ;      126.  $y(t) = t + \int_0^t \sin(t - \tau)y(\tau)d\tau$ ;  
 127.  $y(t) = e^{-2t} - 4 \int_0^t \cos(t - \tau)y(\tau)d\tau$ ;      128.  $y(t) = \cos t - 4 \int_0^t e^{4t - \tau}y(\tau)d\tau$ ;  
 129.  $y(t) = \sin t + \int_0^t (t - \tau)y(\tau)d\tau$ ;      130.  $y(t) = e^{2t} + \int_0^t \sin(t - \tau)y(\tau)d\tau$ .

### Зміст

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ З КУРСУ “СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ”	3
Робота з підручником	3
Розв’язок задач	3
Самоперевірка	4
Консультації	4
Контрольні роботи	4
Залки та іспити	5
<b>ПРОГРАМА КУРСУ “СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ”</b>	<b>5</b>
1. ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ	5
2. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ	6
3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ	6
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	7
<b>МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ КУРСУ “СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ”</b>	<b>7</b>
Тема 1. ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ	7
<i>Питання для самоперевірки</i>	8
Тема 2. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ	9
<i>Питання для самоперевірки</i>	10
Тема 3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ	11
<i>Питання для самоперевірки</i>	11
<b>ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ</b>	<b>11</b>
Тема 1. ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ	11
Тема 2. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ	14
Тема 3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ	16
ЗМІСТ	19